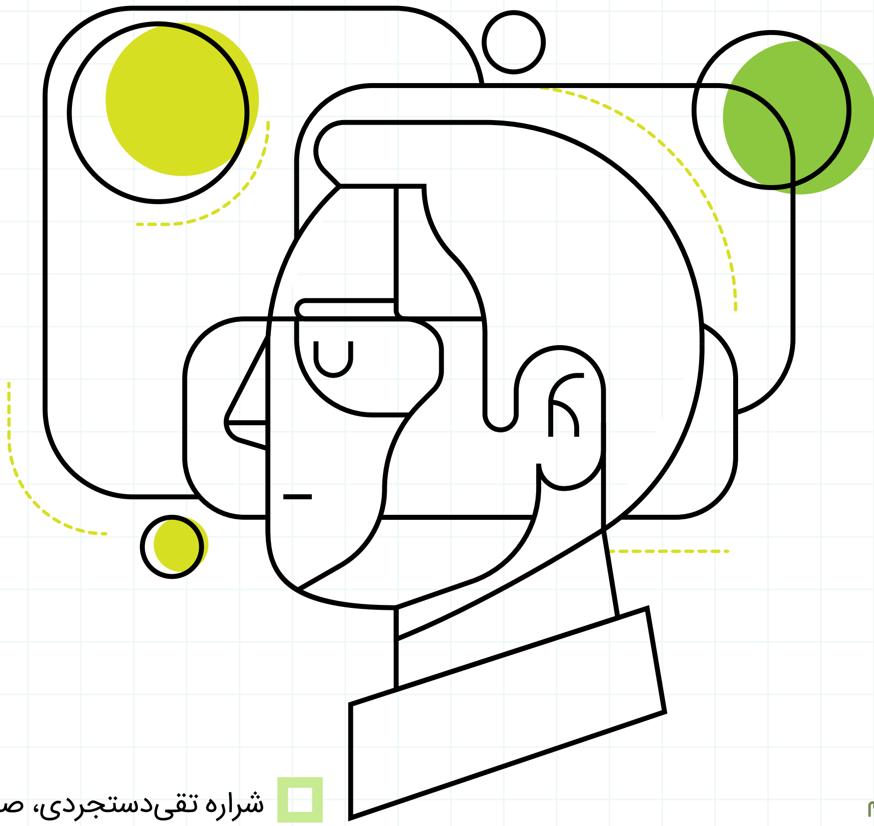

قسمت چهارم

استدلال‌های غلطِ درست‌نما

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

در کلاس ریاضی

نیمی از زمان کلاس گذشته بود. معلم به ساعتش نگاه کرد و چند ثانیه‌ای به فکر فرو رفت. سپس سکوت کلاس را شکست و گفت: «بچه‌ها من برگه‌های شما را صحیح کرده‌ام، اما اجازه بدهید قبل از آنکه آن‌ها را به شما بدهم، دربارهٔ سؤال ۵ کمی صحبت کنیم.»

آنگاه گچ را برداشت و صورت سؤال را روی تخته نوشت:

علی می‌گوید: اگر هر کسی به من سه عدد طبیعی بدهد، می‌توانم دو تا از آن‌ها را به گونه‌ای انتخاب کنم که مجموع آن دو عدد بر دو بخش‌پذیر باشد. شما گفتهٔ علی را چطور ثابت می‌کنید؟

معلم به طرف دانش‌آموزان برگشت و گفت: «همهٔ شما به نحوی به این سؤال پاسخ داده‌اید. از شما می‌خواهم دربارهٔ اثباتی که در ادامه خواهم نوشت فکر کنید و بگویید آیا این اثبات را می‌پذیرید یا خیر. کسانی که موافق هستند دستشان را بالا بگیرند.

۸ – ۱۸ – ۹

۱۸+۸ =۲۶

پس علی می‌تواند این کار را انجام دهد.

وقتی نوشتن معلم تمام شد، دست چند نفر بالا آمد. دست **رها** پایین بود. معلم می‌دانست که او در برگه‌اش چه نوشته است، پس از او خواست که بگوید چرا این استدلال را نمی‌پذیرد.

رها: خب به نظرم مثال‌زدن کافی نیست. چون که برای اثبات ادعای علی باید هر سه عدد طبیعی را بررسی کنیم و انجام این کار فقط با مثال‌زدن غیرممکن است. پس باید راهی پیدا کنیم که به بررسی همهٔ عددهای طبیعی نیاز نباشد. مثلاً در هندسه وقتی می‌خواستیم ثابت کنیم مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، نمی‌آمدیم یک مثلث بکشیم و زاویه‌هایش را اندازه بگیریم. ما برای این کار از قضیهٔ خط‌های موازی و مورب استفاده می‌کردیم.

معلم لبخندی به رها زد و گفت: «رها، می‌خواهی راه حل خودت را برای ما بنویسی؟»

رها به سمت تخته آمد. یک تکه گچ برداشت و تند تند عددها و عبارت‌هایی را نوشت:

۴ و ۶ و ۸⇐۴+۶=۱۰
۵ و ۷ و ۹⇐۵+۷=۱۲
۱۳ و ۱۵ و ۸⇐۱۳+۱۵=۲۸
۱۰ و ۱۲ و ۱۹⇐۱۰+۱۲=۲۲

رها گچ را گذاشت روی میز، اما پیش از آنکه چیزی بگوید، یکی از دانش‌آموزان با صدایی اعتراض‌آمیز گفت: «رها خودت هم که مثال زدی!»

معلم: بله به نظر می‌رسد رها هم مثال زده است. اما چه فرقی بین راه حل رها و راه حلی که من نوشتم می‌بینید؟

کسی چیزی برای گفتن نداشت. معلم به رها نگاه کرد و از او خواست تا در مورد راه حلش توضیح بدهد.

رها: خب ما هر بار سه تا عدد به علی می‌دهیم، اما برای این سه عدد، چهار حالت وجود دارد:

حالت اول: سه عدد زوج انتخاب کنیم؛ مثال: ۴، ۶ و ۸. علی می‌تواند ۴ و ۶ را جمع کند. در واقع فرقی نمی‌کندکدام دو تا را انتخاب کند، چون همهٔ عددها زوج‌اند و جمع دو عدد زوج، زوج می‌شود و می‌دانیم که عددهای زوج هم بر دو بخش‌پذیرند.

حالت دوم: سه عدد فرد انتخاب کنیم؛ مثلاً ۵، ۷ و ۹. جمع ۵ و ۷ می‌شود ۱۲ و باز هم فرقی نمی‌کند علی کدام دو عدد را انتخاب کند، چون جمع دو عدد فرد هم زوج می‌شود.

حالت سوم: دو عدد فرد و یک عدد زوج انتخاب کنیم؛ مثلاً ۱۳، ۱۵ و ۸. جمع ۱۳ و ۱۵ می‌شود ۲۸. در واقع این بار، علی آن دو تا عدد فرد را انتخاب می‌کند.

حالت چهارم: دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب کنیم؛ مثلاً ۱۰، ۱۲ و ۱۹. جمع ۱۲ و ۱۰ می‌شود ۲۲ که زوج است.

معلم دوباره دانش‌آموزان را مخاطب قرار داد: «حالا چطور؟ با توجه به توضیحات رها، راه‌حل او را تأیید می‌کنید؟»

همهٔ بچه‌ها سرشان را به نشانهٔ تأیید تکان دادند و بلند گفتند: «بله.» رها نیز با خوش‌حالی به سمت نیکمتش برگشت.

معلم: همان‌طور که دیدید، تفاوت مهمی بین مثالی که من نوشتم و مثال‌های راه‌حل رها وجود دارد. در راه‌حل رها حالت‌هایی که برای هر سه عدد طبیعی در نظر گرفته شده‌اند، تمامی عددها را پوشش می‌دهند. این روش به ما اطمینان می‌دهد که هیچ حالت دیگری، و در نتیجه، هیچ سه عددی طبیعی، از قلم نمی‌افتد. در واقع، این مثال‌ها تنها نمایندگانی از هر حالت هستند و به ما در درک بهتر نحوهٔ استدلالش کمک می‌کنند. اما می‌توان این مثال‌ها را حذف کرد و فقط به توضیحات رها اکتفا کرد.

هم‌زمان با صحبت‌های معلم، فکری به سر رها زد. پس همین که معلم آخرین جمله‌اش را گفت، دستش را بالا آورد و پرسید: «آیا می‌توانیم برای هر مسئلهٔ دیگری در مورد عددهای طبیعی، از ایدهٔ زوج و فرد استفاده کنیم؟»

معلم لبخند زدی و گفت: «چند لحظه اجازه بده تا یک مسئلهٔ دیگر مطرح کنم و پیشنهادت را برای آن بررسی کنیم.»

معلم پس از چند لحظه تأمل به سمت تخته رفت، گچ را برداشت و این عبارت را نوشت:

> ثابت کنید اگر عددی بر سه بخش‌پذیر باشد، مربع آن عدد بر نُه بخش‌پذیر است.

سپس به سمت دانش‌آموزان برگشت و پرسید: «خُب، چطور می‌خواهی از ایدهٔ زوج و فردبودن استفاده کنی؟»

رها: اجازه! هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد. اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش‌پذیر، مثل ۶، آن وقت مربعش هم که می‌شود ۳۶، بر نُه بخش‌پذیر است. اگر عدد ما فرد باشد، برای مثال ۱۵، مربع آن می‌شود ۲۲۵ که باز هم بر نُه بخش‌پذیر است.

معلم: ممنون رها. بچه‌ها، شما این اثبات را می‌پذیرید؟

ادامه دارد ...

نظر شما در مورد استدلال رها چیست؟ آیا این حقیقت که عددهای طبیعی یا زوج هستند یا فرد، در اینجا کمک‌کننده است؟

همان طور که معلم تذکر داد، مثال‌های رها در مورد ادعای علی به ما کمک می‌کنند تا ساختار اثبات را ببینیم. در نتیجه پس از آشکارشدن ساختار اثبات، به‌راحتی می‌توانیم آن‌ها را حذف کرده و شروع کنیم به نوشتن اثبات دقیق. این کار حتی بین ریاضی‌دان‌های حرفه‌ای هم متداول است:

مثال زدن ← شهود پیدا کردن از ساختار اثبات ← نوشتن اثبات دقیق

برگردیم به مسئلهٔ آخر معلم! چرا در مورد این مسئله، ایدهٔ رها کمک‌کننده نبود؟

بیایید یک لحظه مثال‌ها را از اثبات رها حذف کنیم. در این صورت گفتهٔ او چنین می‌شود:

هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد. اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش‌پذیر، آن وقت مربعش هم بر نُه بخش‌پذیر است. اگر عدد ما فرد باشد، آنگاه مربع آن باز هم بر نُه بخش‌پذیر است.

همان‌طور که می‌بینید رها مسئلهٔ اصلی را به دو زیرمسئلهٔ دیگر تبدیل کرده است:

الف) اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش‌پذیر، آن وقت مربعش هم بر نُه بخش‌پذیر است.

ب) اگر عدد ما فرد باشد و بر سه بخش‌پذیر، آن وقت مربعش هم بر نُه بخش‌پذیر است.

او برای نشان‌دادن درستی هر یک از این دو مسئله فقط یک مثال زده است و این مثال‌ها ساختاری از اثبات را به ما نشان نمی‌دهند. بنابراین، عملاً هنوز اثباتی برای مسئلهٔ اصلی معلم دیده نمی‌شود. اما در مورد ادعای علی موضوع بخش‌پذیری بر دو بود. توجه به زوج و فردبودن عددها نه تنها دور از ذهن نیست، بلکه دیدیم کمک‌کننده هم هست.

شاید بگویید با ایدهٔ رها، مسئله به دو زیرمسئله تبدیل می‌شود و اگر بتوان هر کدام از آن‌ها را اثبات کرد، آنگاه مسئلهٔ اصلی برای هر عدد طبیعی درست است. بله حق با شماست، البته اگر بتوان چنین کرد. در واقع گاهی، حل دو زیرمسئله، یکی برای عددهای فرد و یکی برای عددهای زوج، فقط کار ما را دو برابر می‌کند. اما برای اینکه بفهمیم در مسئلهٔ حاضر این کار مفید است یا نه، ابتدا باید از خودمان بپرسیم زوج و فردبودن یک عدد به عددهای بخش‌پذیر بر سه و نُه چه ارتباطی دارد؟